$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 1, \quad z\in B(a,r)$$

$\overline{B(a,r)} \subseteq Z$

$f:$  $Z \to \mathbb{C}$

z σταθερό

$w\in\gamma$

ολόμορφη

f' συνεχής

$(1-t)z + tw \in Z$

$$h(t) = \int_\gamma \frac{f((1-t)z+tw)}{w-z}\,dw, \quad t\in[0,1]$$

$$h'(t) = \int_\gamma \frac{d f((1-t)z+tw)}{(w-z)dt}\,dw$$

$$= \int_\gamma f'((1-t)z+tw)\,dw$$

$$F(w) = \frac{f((1-t)z+tw)}{t}, \quad t\in(0,1] \quad \Big| = \int_\gamma f'(w)\,dw \quad t\in(0,1]$$

$$\overset{\shortparallel}{0}$$

$$\left.\begin{aligned} &h'(t)=0, \ \forall t\in(0,1] \\ &h'(0)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &h(t) = c \\ &h(0) = h(1) \end{aligned} \qquad h(1) \downarrow$$

το $h(0)$ είναι $\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)dw}{w-z} = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw}$

- $f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \to 2\pi i f(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

$$\to f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dz, \quad z\in B(a,r)$$

$\uparrow$

$1^{ος}$ τύπος του Cauchy (για ολόμορφες συναρτήσεις)

- $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad z\in B(a,r)$

$f(z) = \frac{z+1}{z^2-iz}$ $\quad a = 2i$

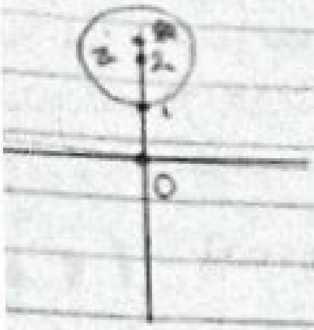
r μέγιστο δυνατό

να εφαρμόσω τον τύπο

για $z=0$ και $z=i$ η f δεν τείνει πεπερασμένες τιμές γιατί δεν ορίζεται ο παρονομαστής

Άρα $Z = \mathbb{C} - \{0, i\}$, $\partial Z = \{0, i\}$ (τα σημεία που εξαιρούνται το [illegible])

Η f είναι ολόμορφη ως ρητή



$B(2i, 1)$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(\omega)}{\omega - z}\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^2} d\omega$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^3} d\omega$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+1}} d\omega$$

$$f^{(k+1)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma (k+1) \cdot \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+2}} d\omega$$

$$= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{k+2}} d\omega$$

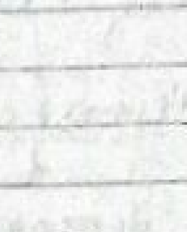
<u>Τύπος</u>: $f^{(\nu)}(z) = \frac{\nu!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{\nu+1}} d\omega$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, $z \in B(a, r)$

$$\int_\gamma \frac{e^\omega + 3i\omega}{\omega - 1}$$

$\gamma: \partial B(0,3)$

$a = 0$

$f(\omega) = e^\omega + 3i\omega$



Η ακτίνα δεν μπορεί να είναι 1 γιατί πρέπει το $z \in B(0, 1$ και αν η ακτίνα είναι 1 τότε το $z=1$ δεν ανήκει στο εσωτερικό

① $\int_\gamma \frac{e^w+3iw}{(w-1)^3}$

$$\int_\gamma \frac{e^w+3iw}{w-1}\,dw = 2\pi i\,(e^1+3i) = 2\pi i\,(e+3i)$$

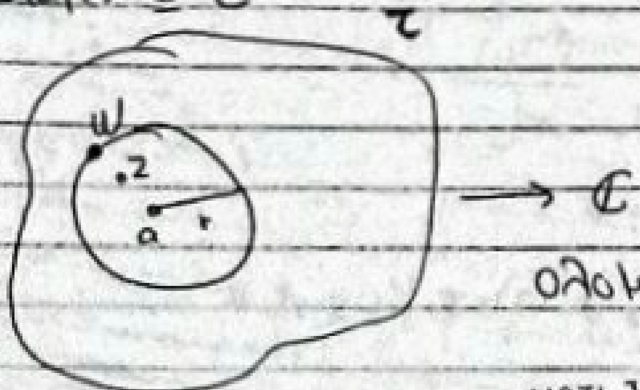
$$f(w)=e^w+3iw$$

$$\int_\gamma \frac{e^w+3iw}{(w-1)^3} = \frac{2\pi i}{2!}\, f''(1) = \pi e i$$

$$F(w)=\frac{e^w+3iw}{(w-1)^2}$$

$\overline{B(a,r)} \subset \tau$

f :



Ολομορφη, f' συνεχ.

$|z-a|<|w-a|=r$ γιατι το z εσωτερικο ενω το w συνοριακο

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right|<1$$

$$\theta=\frac{z-a}{w-a},\quad |\theta|<1$$

Τοτε εκφραση της γεωμ. προοδ.: $1+\theta+\theta^2+\theta^3+\dots=\frac{1}{1-\theta}$

$$1+\frac{(z-a)}{(w-a)}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^2}+\dots=\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}=\frac{w-a}{w-z}$$

$$\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\dots=\frac{1}{w-z}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\omega)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(z-a)^v}{(\omega-a)^{v+1}}d\omega \quad (*)$$

→ Όταν το z βρίσκεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του δίσκου τότε ισχύει ότι: $(*)\ \sum_{v=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{v+1}}d\omega\right)}_{a_v}\cdot(z-a)^v$

$$=\sum_{v=0}^{+\infty}a_v(z-a)^v \quad (\Rightarrow \text{ΣΕΙΡΑ TAYLOR})$$

με κεντρο το σημειο a

Το που συγκλίνει η σειρα εξαρτάται απο την a_v

$$a_v=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{v+1}}d\omega=\frac{1}{v!}\left(\frac{v!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{v+1}}d\omega\right)$$

$$=\frac{f^{(v)}(a)}{v!}$$

$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\dots$

$z=a \mid f(a)=a_0,\ f'(a)=a_1,\ f''(a)=2a_2,\ \dots$

Εφαρμογη: $f(z)=\frac{z+1}{z-2i}$ $\quad a=0$

$\partial\tau=\{2i\}$

$\tau=\mathbb{C}-\{2i\}$

Θελω το μεγιστο δισκο: αρα $B(0,2)$ προσοχη 2 και οχι $2i$

Μεσω σε αυτον τον κυκλικο δισκο εχω:
$$f(z)=\sum_{v=0}^{\infty}a_v(z-0)^v=\sum_{v=0}^{\infty}a_v\cdot z^v$$

$\frac{1}{z-2i}$, $\quad |z|<2$, $\quad \left|\frac{z}{2i}\right|<1$, $\frac{z}{2i}=\theta$

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\frac{z}{2i}-2i}$$

$$=-\frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{z}{2i}}=-\frac{1}{2i}\frac{1}{1-\theta}$$

$$\frac{-1}{2i}\sum_{v=0}^{+\infty}\theta^v = -\frac{1}{2i}\sum_{v=0}^{+\infty}\frac{z^v}{(2i)^v} = \sum_{v=0}^{+\infty}\left[\frac{-1}{(2i)^{v+1}}\right]z^v$$

Άρα $f(z)=(z+1)\cdot\frac{1}{z-2i} = (z+1)\sum_{v=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{(2i)^{v+1}}\right]z^v$

$$= z\sum_{v=0}^{+\infty}\frac{-1}{(2i)^{v+1}}z^v + \sum_{v=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{(2i)^{v+1}}\right)z^v =$$

$$= \sum_{v=0}^{+\infty}\frac{-1}{(2i)^{v+1}}z^{v+1} + \sum_{v=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{(2i)^{v+1}}\right)\cdot z^v =$$

$$= \frac{-1}{2i} + \frac{-1}{(2i)^2}z + \frac{-1}{(2i)^3}z^2 + \dots + \frac{-1}{(2i)^2}z + \frac{-1}{(2i)^3}z^2$$

$$= -\frac{1}{2i} + \frac{-2}{(2i)^2}\cdot z + \frac{-3}{(2i)^3}z^3 + \dots$$

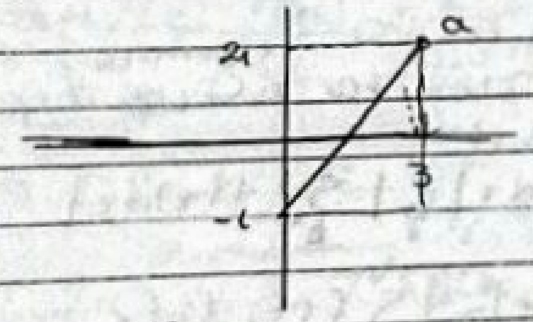
↑ =

από εδώ βλέπω ότι:
$a_v = \frac{-v}{(2i)^v}$

Ασκ

$f(z)=\frac{1}{(z+i)^2} \Longrightarrow$ θέλω να την γράψω ως εξής: $\sum_{v=0}^{+\infty}a_v(z-(3+2i))^v$

$a=3+2i$



$B(3+2i, 3\sqrt{2})$

$$h(z)=\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-(3+2i))+i+(3+2i)} \overset{*}{=}$$

$$\left\{|-i-a| = |-i-3-2i| = |-3i-3| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}\right\}$$

$$* = \frac{1}{z-(3+2i)+3(1+i)} = \frac{1}{3(1+i)}\cdot\frac{1}{1+\boxed{\frac{z-(3+2i)}{3(1+i)}}} \to \theta,\ |\theta|<1$$

$$= \frac{1}{3(1+i)} \cdot \sum_{\nu=0}^{+\infty} (-1)^\nu \frac{[z-(3+2i)]^\nu}{(3(1+i))^\nu}$$

$$\frac{1}{1+\theta} = \frac{1}{1-(-\theta)} = 1-\theta+\theta^2-\theta^3+\dots \Big\}$$

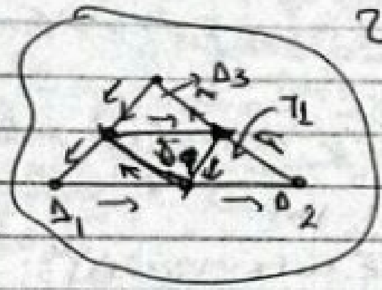
$$h'(z) = \frac{-1}{(z+i)^2}$$

$$f(z) = -\sum_{\nu=1}^{+\infty} (-1)^\nu \frac{\nu}{(3(i+1))^\nu} \cdot (z-(3+2i))^{\nu-1 = k}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot (k+1)}{(3(1+i))^{k+2}} (z-(3+2i))^k$$

Θεώρημα (Λήμμα) Goursat:

Z $\quad T_0 \in Z$

$f:$ 

$\rightarrow \mathbb{C}$

f ολόμορφη

$\partial\Delta_0$ $\boxed{I = \int_{\Delta_0} f(z)dz = 0,}$ όπου Δ_0 η περιοχ…

Παίρνω τα μέσα του τριγώνου και τα ενώνω

$\{$ Στο εσωτερικό τρίγωνο έχω και θετική και αρνητική φορά $\}$

$$\Delta_0 = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4 \Rightarrow \exists\, \Delta^1 \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\} : \left|\int_{\Delta_j} f(z)dz\right| \le \left|\int_{\Delta^1} f(z)dz\right|$$

$$|I| = \left|\int_{\Delta_0} f(z)dz\right| = \left|\int_{\sum_{j=1}^{4}} f(z)dz\right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{4} \left|\int_{\Delta_j} f(z)dz\right| \le 4\cdot\left|\int_{\Delta^1} f(z)dz\right|$$

2

Εστω d^1 η περίμετρος του μισού τριγώνου

$$d^1 = \frac{1}{2} d^0$$

p^1: διάμετρος του τριγώνου T_1 $\to$ $p^1 = diam(T^1) = \frac{1}{2} p^0$

Τώρα για το τρίγωνο Δ_1 περνώ πάλι τα μέσα και τα ενώνω και αυτό το κάνω επαγωγικά

$$T_0 \supseteq T^1 \supseteq T^2 \supseteq \dots T^\nu$$
$$\Delta^0, \Delta^1, \Delta^2, \dots, \Delta^\nu$$
$$d^0, d^1, d^2, \dots d^\nu$$
$$p^0, p^1, p^2, \dots p^\nu$$

$$d^1 = \frac{1}{2} d^0, \quad d^2 = \frac{1}{2} d^1 = \frac{1}{2^2} d^0, \dots, \boxed{d^\nu = \frac{1}{2^\nu} d_0}$$

$$p^1 = \frac{1}{2} p^0, \quad p^2 = \frac{1}{2} p^1 = \frac{1}{2^2} p^0, \dots, \boxed{p^\nu = \frac{1}{2^\nu} p^0}$$

$$\cap T^\nu = \{z_0\} \Leftarrow \boxed{\lim p^\nu = \lim \frac{1}{2^\nu} p^0 = 0}$$

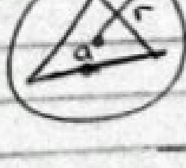
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$\varepsilon > 0$ $\exists r > 0$: $|z - z_0| < r \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| \le \varepsilon |z - z_0|$ $\forall z \in B(z_0, r)$

$\exists \nu_0$: $\nu \ge \nu_0$ $T^\nu \in B(z_0, r)$

$$\int_{\Delta^\nu} f(z) dz = \int_{\Delta^\nu} 1 \, dz = 1$$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu (z-a)^\nu$$



$$F(z) = \sum_{\nu=0} \frac{a_\nu}{\nu+1} (z-a)^{\nu+1}$$

$$\int_\gamma f = \int_\gamma F' = 0$$